Übungen zur Quantenmechanik I
Prof. J. S. Briggs

Blatt 10 SoSe 2005

Aufgabe 1: Projektionsoperatoren in einem endlichdimensionalen Hilbertraum

Gegeben sei ein zweidimensionaler Hilbertraum mit der orthonormalen Basis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. In diesem ist ein Operator σ_y definiert, der bezüglich dieser Basis die Matrixdarstellung

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{hat}\,.$$

(a) Ist σ_y hermitisch? Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und die Eigenvektoren $|K_1\rangle$, $|K_2\rangle$ bezüglich der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

(b) Die Projektionsoperatoren P_1, P_2 auf die Eigenvektoren sind definiert durch

$$P_1|K\rangle = |K_1\rangle\,, \quad P_2|K\rangle = |K_2\rangle\,.$$

Dabei ist $|K\rangle$ ein *beliebiger* Vektor des Hilbertraums. Berechnen Sie die Matrixdarstellung der Projektionsoperatoren P_1 und P_2 bezüglich der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ und zeigen Sie, dass die Projektionsoperatoren idempotent sind, d.h. $P_i^2 = P_i \quad (i = 1, 2)$.

Aufgabe 2: Paritätsoperator in einem unendlich dimensionalen Hilbertraum

Der Paritätsoperator Π ist in Ortsdarstellung gemäß

$$\langle \vec{r}|\Pi|\vec{r}\,'\rangle = \delta(\vec{r} + \vec{r}\,')$$

definiert. $|\Psi\rangle$ sei ein Ket-Vektor in Dirac-Notation, und $|\vec{r}\rangle$ und $|\vec{r}\,'\rangle$ seien Eigenzustände des Ortsoperators mit Eigenwerten $\vec{r}$ und $\vec{r}\,'$.

(a) Verwenden Sie die Dirac-Notation zur Berechnung der Ortsdarstellung $\langle \vec{r}|\Pi|\Psi\rangle$ von $\Pi|\Psi\rangle$.
Hinweis: Benutzen Sie die Vollständigkeitsrelation $\int |\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|d\vec{r}\,' = 1$.
Zeigen Sie, dass Π unitär und hermitisch ist.

(b) Das Transformationsverhalten eines Operators A unter Paritätstransformation ist durch $A' = \Pi A \Pi^\dagger$ gegeben. Berechnen Sie die Kommutatorrelation $[A', \Pi]$ für A' gerade ($A' = A$) und A' ungerade ($A' = -A$).

(c) Betrachten Sie die Eigenwertgleichung $\Pi|\Psi\rangle = \pi|\Psi\rangle$ und bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte π von Π.

(d) Bestimmen Sie die *Paritätsauswahlregeln* für das Matrixelement $\langle\Psi_f|A|\Psi_i\rangle$, wobei A ein gerader oder ungerader Operator ist und $|\Psi_i\rangle$ und $|\Psi_f\rangle$ Eigenzustände von Π sind. Wenden Sie Ihr Ergebnis an, um Dipolauswahlregeln für die Matrixelemente $\langle\Psi_{nlm}|\vec{r}|\Psi_{n'l'm'}\rangle$ abzuleiten, wobei $|\Psi_{nlm}\rangle$ die Eigenzustände des Wasserstoffatoms sind.
Hinweis: Verwenden Sie, dass die Eigenzustände des Wasserstoffs Parität $\pi = (-1)^l$ haben.

Aufgabe 3: Besetzungszahldarstellung des harmonischen Oszillators

Die Darstellung der Basisvektoren $|\psi_n\rangle$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) des harmonischen Oszillators, als Spaltenvektoren betrachtet, erfüllt die Normierung $\langle\psi_m|\psi_n\rangle = \delta_{mn}$.

(a) Berechnen Sie die Matrixdarstellung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ and a bezüglich der Basis $|\psi_n\rangle$.

(b) Gegeben sei der Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte des Hamiltonoperators H sowie der Operatoren x^2, x, p^2 und p bezüglich dieses Zustandes und die Unschärfe $\Delta x \Delta p$.

Klausur: 09.07.2005, 9 Uhr s.t. im HS I und HS II des Physikhochhauses.