Übungen zur Quantenmechanik I
Prof. J. S. Briggs

Blatt 9 SoSe 2005

Aufgabe 1: Das Wasserstoffatom ... again

Das Wasserstoff hat das Potential $V(r) = -Ze^2/r$, wobei e die Elementarladung und Z die Ladungzahl ist. Die Lösung dieses Problem ist Ihnen aus der Vorlesung bekannt.

a) Der mittlere Radius ist gegeben durch

$$\langle r \rangle_{nl} = \int d\vec{r}\ \psi^*_{nlm}(\vec{r})\ r\ \psi_{nlm}(\vec{r}), \tag{1}$$

wobei $\psi_{nlm}(\vec{r})$ die Eigenfunktionen des Systems sind. Bestimmen Sie $\langle r \rangle_{nl}$ in Abhängigkeit von Z und dem Bohrschen Radius a für $n = 1, 2$ und den zugehörigen Werten von l.

b) Zeigen Sie, dass aus Gl.(1) folgt, dass die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P_{nl}(r) = r^2 R^2_{nl}(r)$$

ist, wobei $R_{nl}(r)$ die Radialteile der Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms sind. Bestimmen Sie nun das Maximum von $P_{nl}(r)$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis zu a) für $n = 1$ und $l = 0$.

c) Das Coulombpotential mit der Ladungszahl $(Z + 1)$ ist

$$-\frac{(Z+1)e^2}{r} = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{e^2}{r}.$$

Betrachten Sie ein Teilchen in einem Coulombpotential $V(r) = -Ze^2/r$ als bereits gelöstes, ungestörtes Problem mit dem Hamiltonoperator H_0. Der zusätzliche Term $-e^2/r$ soll als Störung $W'(r)$ behandelt werden.

Bestimmen Sie den Energieeigenwert in erster Ordnung in λ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis zum exakten Wert. (Hinweis: Führen Sie die “kleine” Größe $\lambda \equiv 1/Z$ ein.)

Bemerkung: Die Störungstheorie funktioniert hier trotz der Entartung, da die Störung nur von r abhängt und daher nicht an die Quantenzahlen l und m koppelt.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator mit äusserer Kraft

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Frequenz ω wird durch eine äussere Kraft F gestrört. Der Hamiltonopertor hat dann folgende Form

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx.$$

a) Zeigen Sie, dass die exakten Energieeigenwerte E_n und die exakten Eigenfunktionen Ψ_n durch

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) - \frac{F^2}{2m\omega^2}$$

bzw.

$$\Psi_n = \exp\left[-i\frac{F}{m\omega^2}\frac{p}{\hbar}\right]\phi_n$$

gegeben sind, wobei ϕ_n die ungestörten Eigenfunktionen zu $F = 0$ bezeichnet.

Hinweis: durch geschickte Erweiterungen in H lassen sich die Ergebnisse *ohne* lange Rechnungen erhalten.

b) Betrachten Sie $W'(x) = -Fx$ als kleine Störung und bestimmen Sie die Energieeigenwerte erster und zweiter Ordnung in F. Die Lösung des ungestörten harmonischen Oszillators ist Ihnen aus der Vorlesung bekannt.

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Eigenfunktionen des ungestörten Problems orthonormiert sind und dass die Hermitepolynome der folgenden Rekursion gehorchen:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$