Übungen zur Quantenmechanik I
Prof. J. S. Briggs

Blatt 7 SoSe 2005

Aufgabe 1: Drehimpulseigenfunktionen und Leiteroperatoren

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Drehimpulseigenfunktionen die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ sind. Weiterhin wurden die Leiteroperatoren $L_\pm = L_x \pm iL_y$ definiert.

a) Bestimmen Sie für $l = 2$ die funktionelle Form aller $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ (hierfür es ist nicht nötig, die Funktionen zu orthonormieren). Benutzen Sie hierbei, dass

$$L_+ Y_{l,l}(\theta, \phi) = 0$$

und erzeugen Sie die funktionelle Form der übrigen Eigenfunktionen durch wiederholte Anwendung von L_-.

Hinweis: verwenden Sie die Darstellung von $L_\pm$ als Differentialoperatoren.

b) Zeigen Sie, dass $Y_{2,-1}(\theta, \phi) = -Y^*_{2,1}(\theta, \phi)$ ist.

Aufgabe 2: Radiale Erwartungswerte des H-Atoms und der Virialsatz

a) Benutzen Sie die radiale Schrödingergleichung des H-Atoms

$$\frac{d^2 R_{nl}}{d\rho^2} + \left[\frac{2}{\rho} - \frac{1}{n^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] R_{nl} = 0$$

mit $\rho = \mid \vec{r} \mid /a$ und $a = \hbar^2/(me^2)$, um die Kramers-Relation

$$\frac{s+1}{n^2}\langle r^s \rangle - (2s+1)a\langle r^{s-1}\rangle + \frac{s}{4}[(2l+1)^2 - s^2]a^2\langle r^{s-2}\rangle = 0 \tag{1}$$

herzuleiten. $\langle r^s \rangle$ ist der Erwartungswert von r^s im Zustand (nlm) mit $s > -2l - 3$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von Gleichung (1) die Erwartungswerte $\langle r^{-1}\rangle$, $\langle r \rangle$ und $\langle r^2 \rangle$.

c) Bestimmen Sie das Verhältnis der Erwartungswerte der kinetischen und potentiellen Energie, $\langle T \rangle_{nlm}$ und $\langle V \rangle_{nlm}$, indem Sie das Resultat aus b) für $\langle r^{-1}\rangle$ sowie den Erwartungswert der Gesamtenergie des H-Atoms erwenden. Vergleichen Sie ihr Ergebnis zum Virialsatz für den harmonischen Oszillator.