# Übungen zur Quantenmechanik I
Prof. J. S. Briggs

Blatt 6 SoSe 2005

---

## Aufgabe 1: Zweidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator

Ein Teilchen der Masse $m$ bewegt sich in zwei Dimensionen unter dem Einfluss des harmonischen Potentials $V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2$ mit $\rho^2 = x^2 + y^2$.

a) Geben Sie die Eigenfunktionen $\Psi(x,y)$ des zweidimensionalen Oszillators in kartesischen Koordinaten an. Zeigen Sie dazu, dass das Problem mithilfe des Separationsansatzes $\Psi(x,y) = f(x)g(y)$ in zwei eindimensionale Probleme zerlegt werden kann, und verwenden Sie die Ergebnisse für den eindimensionalen Oszillator aus der Vorlesung.

Geben Sie die niedrigsten drei Energieeigenwerte an und berechnen Sie den Entartungsgrad (Zahl der Eigenfunktionen) pro Energieeigenwert.

b) Die Eigenfunktionen des zweidimensionalen Oszillators sollen nun in Zylinderkoordinaten berechnet werden. Schreiben Sie dazu die zweidimensionale Schrödingergleichung in Zylinderkoordinaten. Hinweis: Der Laplace-Operator hat in Zylinderkoordinaten $x = \rho\cos\phi$ und $y = \rho\sin\phi$ die Form

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\,. \tag{1}$$

Verwenden Sie zur Lösung den Separationsansatz $\Psi(\rho,\phi) = v(\rho)\mathrm{e}^{im\phi}$. Welche Werte darf die Quantenzahl $m$ annehmen? Leiten Sie durch Einsetzen des Separationsansatzes in die zweidimensionale Schrödingergleichung eine Differentialgleichung für die radiale Wellenfunktion $v(\rho)$ her. Ergebnis:

$$\left(\frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dv}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}v\right) + \left(k^2 - \lambda^2\rho^2\right)v = 0\,, \qquad E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\,,\ \lambda = \frac{m\omega}{\hbar} \tag{2}$$

c) Zeigen Sie, dass $w(\rho) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}\rho^2}$ eine asymptotische Lösung der Radialgleichung (2) für große Werte von $\rho$ ist und dass für $\rho \to 0$ die nicht-singulären Lösungen proportional zu $\rho^{|m|}$ sein müssen.
Motivieren Sie damit den Produktansatz $v(\rho) = \rho^{|m|}w(\rho)F(\rho)$ für die radiale Wellenfunktion, wobei $F(0)$ von Null verschieden ist. Die Differentialgleichung für $F(\xi)$ in der Variablen $\xi = \lambda\rho^2$ lautet (muss nicht gezeigt werden!):

$$\xi\frac{d^2F}{d\xi^2} + [(|m|+1) - \xi]\,\frac{dF}{d\xi} - \frac{1}{2}\left[(|m|+1) - \frac{k^2}{2\lambda}\right]F = 0 \tag{3}$$

d) Lösen Sie die Differentialgleichung (3) mittels Potenzreihenansatz $F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$.

Zeigen Sie, dass die Forderung der Normierbarkeit der Eigenzustände zu einer Abbruchbedingung der Potenzreihe bei einem Wert $n_\rho$ führt und dies die Quantisierung der Energieeigenwerte impliziert.

Berechnen Sie den Entartungsgrad der drei niedrigsten Energieeigenwerte und vergleichen Sie mit Teilaufgabe a).

Teilergebnis: $E_{n_\rho,m} = \hbar\omega(|m| + 1 + 2n_\rho)$.

## Aufgabe 2: Kommutatorbeziehungen für Drehimpulsoperatoren

Der Drehimpulsoperator ist definiert durch $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (mit $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ in der Ortsdarstellung) und erfüllt die Vertauschungsrelation $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L}$.

a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[L_y, \mathbf{p}^2]$, $[L_y, 1/r]$ und $[L_y, 1/|\mathbf{r} - \mathbf{a}|]$, wobei $\mathbf{a}$ ein beliebiger Vektor im Ortsraum ist.

b) Berechnen Sie folgende Kommutatoren für die in der Vorlesung eingeführten Aufsteige- und Absteigeoperatoren $L_\pm = L_x \pm iL_y$:

$[\mathbf{L}^2, L_\pm]$, $[L_+, L_-]$ und $[L_z, L_\pm]$.

Zeigen Sie außerdem, dass $L_\pm L_\mp = \mathbf{L}^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z$ gilt.