# Übungen zur Quantenmechanik I
Prof. J. S. Briggs

Blatt 4 SoSe 2005

---

## Aufgabe 1: Streu- und Bindungszustände in einem Kastenpotential

Ein Teilchen der Energie $E$ und Masse $m$, das quantenmechanisch durch die eindimensionale Schrödingergleichung beschrieben wird, bewegt sich in einem Kastenpotential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \quad \text{(Bereich I)} \\ -V_0 & -a \leq x < 0 \quad \text{(Bereich II)} \\ \infty & 0 \leq x \quad \text{(Bereich III)} \end{cases}$$

a) Lösen Sie die Schrödingergleichung für Energien $E > 0$ in den drei Raumbereichen unter Berücksichtigung der Stetigkeit der Wellenfunktion $\psi(x)$ und ihrer logarithmischen Ableitung $\psi'(x)/\psi(x)$ an der Stelle $x = -a$.

b) Diskutieren Sie für $E > 0$ die Reflektionswahrscheinlichkeit der nach links laufenden reflektierten Welle im Bereich I als Funktion der Wellenzahl $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ des Teilchens im Bereich I und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Bereich II. Wann wird letztere maximal?

c) Für gebundene Zustände ist $-V_0 < E < 0$. Leiten Sie aus der Forderung der Normierbarkeit der gebundenen Wellenfunktionen eine Gleichung ab, der die Energien gebundener Zustände genügen müssen und lösen Sie diese grafisch.

## Aufgabe 2: Zustände im attraktiven Delta-Potential

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse $m$ in einem eindimensionalen attraktiven Delta-Potential $V(x) = -V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$.

a) Integrieren Sie die Schrödingergleichung des Teilchens zwischen $x = -\varepsilon$ und $x = \varepsilon$. Zeigen Sie durch Grenzwertbildung $\varepsilon \to 0$, dass die Ableitung einer Eigenfunktion $\psi(x)$ des Hamiltonoperators bei $x = 0$ unstetig ist. Bestimmen Sie die Unstetigkeit in Abhängigkeit von $V_0$, $m$ und $\psi(0)$.

b) Zeigen Sie, dass das Potential genau einen gebundenen Zustand hat und berechnen Sie dessen Energie $-E_b$.

c) Berechnen Sie die Reflektionsamplitude $R(E)$ und Transmissionsamplitude $T(E)$ einer von links einlaufenden ebenen Welle der Energie $E$. Betrachten Sie $T(E)$ als analytische Funktion der Energie und diskutieren Sie das Verhalten für negative Werte von $E$. Was bedeutet das Verhalten von $T(E)$ bei $E \to -E_b$ physikalisch?

## Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator im Impulsraum

In der Vorlesung haben Sie die Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse $m$ in einem eindimensionalen, harmonischen Oszillator-Potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ kennen gelernt. Die Lösung dieser Gleichung im Ortsraum sei $\psi(x)$.

a) Bestimmen Sie die zugehörige Schrödingergleichung im Impulsraum mit Hilfe der Fouriertransformation

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ikx}\psi(x).$$

Zeigen Sie, dass die Strukturen der beiden Schrödingergleichungen die gleichen sind.

b) Zeigen Sie, dass aus der Normierung von $\psi(x)$ auch die Normierung von $\tilde{\psi}(k)$ folgt.