Übungen zur Quantenmechanik I
Prof. J. S. Briggs

Blatt 3 SoSe 2005

Aufgabe 1: Glaubersche Identität

Zeigen Sie, dass die Beziehung
$$e^A e^B = e^{A+B+1/2[A,B]}$$
gilt, wenn die beiden Operatoren A und B die Kommutatorrelationen $[[A,B],A] = 0$ und $[[A,B],B] = 0$ erfüllen.

Hinweis: Wählen Sie den Operator $T(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$, berechnen Sie die Differentialgleichung für $\frac{dT(\lambda)}{d\lambda}$ und integrieren Sie diese. Verwenden Sie auch die Ergebnisse von Aufgabe 2 auf Blatt 2.

Aufgabe 2: Eigenschaften der Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation
$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, \mathrm{e}^{-ipx/\hbar} \psi(x)$$
zwischen einer Wellenfunktion $\psi(x)$ im Ortsraum und der dazugehörigen Impulswellenfunktion $\phi(p)$ kann als linearer Operator aufgefasst werden: $(\mathcal{F}\,\psi)(p) \equiv \phi(p)$.

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden beiden Gleichungen:
$$\int dx\, \psi^*(x) \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \psi(x) = \int dp\, \phi^*(p)\, p^n \phi(p)$$
$$\int dp\, \phi^*(p) \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)^n \phi(p) = \int dx\, \psi^*(x)\, x^n \psi(x)$$
Was ist die physikalische Aussage?

b) Die Faltung zweier Funktionen ψ_1 und ψ_2 ist definiert durch
$$(\psi_1 * \psi_2)(x) = \int dy\, \psi_1(y)\psi_2(x-y)$$

Zeigen Sie die Entsprechung zwischen Faltung und Multiplikation im Fourier-Raum:

$$\mathcal{F}(\psi_1 * \psi_2) = \sqrt{2\pi\hbar}\,\mathcal{F}(\psi_1)\mathcal{F}(\psi_2)$$

$$\mathcal{F}(\psi_1) * \mathcal{F}(\psi_2) = \sqrt{2\pi\hbar}\,\mathcal{F}(\psi_1\psi_2)$$

c) Zeigen Sie die Unitaritätsbeziehung

$$\int dp\,|\phi(p)|^2 = \int dx\,|\psi(x)|^2\,.$$

Was bedeutet die Unitarität physikalisch?

Aufgabe 3: Unschärferelation und minimales Wellenpaket

Sei $\alpha = x - \langle x\rangle$ und $\beta = p - \langle p\rangle$. Man kann zeigen, dass die Unschärferelation in der Form $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ nur für Wellenfunktionen geschrieben werden kann, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\alpha\psi(x) = \gamma\beta\psi(x) \qquad \gamma \in \mathrm{C} \tag{1}$$

$$\int dx\,\psi^*(x)(\alpha\beta + \beta\alpha)\psi(x) = 0\,. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass eine Lösung der Gleichung (1) mit γ rein imaginär auch Gleichung (2) erfüllt.

b) Konstruieren Sie mit Hilfe der Beziehungen (1) und (2) ein minimales Wellenpaket $\psi(x)$, das der Normierung $\int dx\,|\psi(x)|^2 = 1$ genügt. Berechnen Sie das Quadrat der Ortsunschärfe $(\Delta x)^2 \equiv \langle\alpha^2\rangle$.

Aufgabe 4: Bindungsenergien und Unschärferelation

Betrachten Sie wasserstoffähnliche Atome. Die Unschärferelation erlaubt, die minimale Energie eines Atoms zu berechnen. Der Radius, in dem das Elektron des Atoms zu finden ist, sei r, dann nehmen wir an, dass die Ortsunschärfe $\Delta x = r$ ist. Für die Impulsunschärfe nehmen wir an, dass $\Delta p = p$ ist. Dann ergibt sich die Unschärferelation zu $rp \approx \hbar$. Die Energie sei

$$E = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

Berechnen Sie die minimale Energie mit Hilfe der Unschärferelation. Vergleichen Sie diese mit dem Bohrschen Modell.