Übungen zur Quantenmechanik I

Prof. J. S. Briggs

Blatt 1 SoSe 2005

Aufgabe 1: Welle als Teilchen

Die Quanten harter Röntgen- oder Gammastrahlung können als masselose relativistische Teilchen angesehen werden. Stoßen sie mit einem ruhenden Elektron, so gilt die Erhaltung von Impuls und relativistischer kinetischer Energie $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$.

(a) Folgern Sie aus den beiden Erhaltungssätzen, dass für die Impulsbeträge p_1 und p_2 des Gamma-Quants vor und nach der Streuung sowie den Impulsbetrag p_e des gestreuten Photons die Gleichung

$$(p_1 - p_2)c + mc^2 = \sqrt{p_e^2c^2 + (mc^2)^2}$$

gilt.

(b) Benutzen Sie die Plancksche Beziehung $E = h\nu$ (h = Wirkungsquantum, ν = Frequenz), um die Rotverschiebung $\lambda_2 - \lambda_1$ des gestreuten Quants in Abhängigkeit des von $\underline{p}_1$ und $\underline{p}_2$ eingeschlossenen Winkels θ zu bestimmen.

Aufgabe 2: Teilchen als Welle

(a) In dem Versuch von Davisson und Germer (1927) wird die Streuung von Elektronen an einer Nickel-Oberfläche beschrieben. Die Elektronen wurden dabei mit einer Spannung von 54V beschleunigt. Ist es prinzipiell möglich, so den Wellencharakter der Elektronen nachzuweisen?

(b) Untersuchungen im atomaren Bereich (in der Größenordnung von 0.1 nm) sollen mit Neutronen durchgeführt werden. Welche Energie müssen die Neutronen haben und welcher Temperatur ($E = k_BT$) entspricht dies? Berechnen Sie ausserdem Energie und Wellenlänge von thermischen Neutronen ($T = 300$K). Wieso sind die Energien in (a) und (b) so verschieden?

(c) Welche Wellenlänge hat ein makroskopisches Objekt, z.B. ein mit der Geschwindigkeit $v = 30$m/s fliegender Ball der Masse $m = 25$g?

Aufgabe 3: Gaußsches Wellenpaket eines freien Teilchens

Die Amplitude der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines freien Teilchens der Masse m am Ort x in einer Raumdimension zur Zeit t sei durch die Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \phi(k) \exp\{i[kx - \omega(k)t]\}$$

gegeben. Dabei erfüllt $\psi(x,t)$ die eindimensionale Schrödingergleichung des freien Teilchens

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $E = E(p)$ zwischen dem Impuls $p = \hbar k$ und der Energie $E = \hbar\omega$ des Teilchens.

(b) Die Verteilung $\phi(k)$ sei durch folgende Gaußfunktion gegeben,

$$\phi(k) = \mathcal{N} \exp\left[-\frac{a^2}{2}(k-k_0)^2\right].$$

Berechnen Sie $\psi(x,t)$. Welche physikalische Bedeutung haben $|\psi(x,t)|^2$, $|\phi(k)|^2$ und k_0? Durch welchen Parameter ist die Breite $\Delta p = \hbar \Delta k$ der Impulsverteilung bestimmt? Bestimmen Sie die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ aus der Bedingung, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu einem festen Zeitpunkt t an einem beliebigen Ort im Raum zu finden, auf eins normiert sein muss.

(c) Untersuchen Sie die zeitliche Entwicklung von $|\psi(x,t)|^2$, insbesondere die des Maximums $x_0(t)$ und der Breite $\Delta x(t)$.

(d) Diskutieren Sie den zeitlichen Verlauf des Produkts $\Delta x(t)\Delta p(t)$. Was sagt das Resultat physikalisch aus?