Taylor-Entwicklung

Taylorsche Formel und Taylorsche Reihe für eine Variable

In der Physik kann man oft keine exakte Lösung für ein Problem oder eine Gleichung finden, daher ist man oft auf eine Näherung angewiesen um die Sache in den Griff zu bekommen. Neben der Fourrierreihe, die in Ana II bereits behandelt wurde, bieten die sogenannten Taylorreihen eine andere Alternative. Sie sind in ihrer "Approximationsfähigkeit" nicht auf 2π-periodische Funktionen beschränkt. Allerdings konvergiert die Taylorreihe nicht notwendigerweise gegen diese Funktion, sondern behält sich immer einen "gewissen" Fehler vor, den man berücksichtigen muss. Dieser geht gegen Null mit $n \to \infty$, aber allerdings muss dazu auch die Funktion unendlich oft ableiten können. Auf die Herleitung der Taylorformel, wir im folgenden allerdings verzichtet ;-). (Falls man will kann man die mathematisch korrekte Einführung z.B. im Forster Analysis I nachschlagen (S.232ff).)

Taylor-Entwicklung für beliebige differenzierbare Funktionen

Ist eine Funktion $f(x)$ stetig auf dem Intervall $a < x < b$ und dort n-mal differenzierbar, Dann kann man durch die Potenzreihe

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$ [1]

ein Näherungspolynom an der Stelle x_0 definieren. Allerdings wird dieses wie bereits erwähnt vermutlich nicht mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmen, daher muss man sich auch noch ein **Restglied** berrechnen, welches sozusagen den Fehler angibt...

$$R_n(x, x_0) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k(\diamondsuit)$$

Das Restglied verschwindet nur im Fall, dass $f(x)$ ein Polynom vom Grad $\nu \leq n$ ist.

[1] wobei $f^{(k)}$ die k-te Ableitung der Funktion darstellt

Satz von Taylor

Die Funktion f(x) sei im abgeschlossenen Intervall $a \leq x \leq b$ an der Stelle x_o, $(n+1)-mal$ differenzierbar. Dann folgt daraus (mit $\diamondsuit$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x,x_0)\clubsuit.$$

Außerdem gibt es eine Zahl $\vartheta(0 < \vartheta < 1)$, so dass

$$R_n(x,x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \vartheta(x-x_0)]\star$$

ist. $\star$ wird auch Restgliedformel von Lagrange genannt.

$\clubsuit$ wir dann als Taylorformel der Funktion $f(x)$ bezeichnet. Dazu muss man aber eine geeignete Abschätzung für den Fehler $R_n(x,x_0)$ benutzen, ein Beispiel hierfür ist $\star$.

Benutzt man nun anstelle der Variablen x, (x_0+h), so erhält man für die Taylorformel die eingentliche Form

$$\begin{aligned} &f(x_0+h) \\ &\quad= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}h^k \\ &\quad+ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \vartheta(x-x_0)];\ (0 < \vartheta < 1) \end{aligned}$$

Mit $n \to \infty$ geht man von der Taylorformel zu Taylor'schen Reihe über.

Satz: (Von der Taylorschen Formel zur Taylorreihe)

Besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 Ableitungen jeder Ordnung und existiert eine positive Zahl r derart, dass

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$$

für alle x aus $|x-x_0| < r$ gilt, dann konvergiert die Reihe

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

in jedem Punkt x des Intervalls $|x-x_0| < r$, und die Summe $s(x)$ dieser Reihe ist dort gleich $f(x)$, so dass folgendes gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (|x-x_0| < r)$$

bzw.

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(h)^k \qquad (|h| < r)$$

Die Entwicklung der Taylorreihe in der Umgebung $|x - x_0| < r$ ist eindeutig bestimmt, falls die Funktion f dort überhaupt auf diese Weise approximierbar ist. Bricht die Taylorreihe vorzeitig nach dem n-ten Glied ab, dann ist das Restglied der Fehler der Taylorentwicklung, falls man nicht bis "∞" geht, also nur die ersten n Glieder benutzt.

Taylor-Entwicklung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Taylor für eine Funktion mit 2 unabhängigen Variablen

Für die Taylorformel 2er Variablen erhält man zusätzlich:

$$\begin{aligned} &f(x+h, y+k) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{l!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^l f(x,y) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x + \vartheta h, y + \vartheta k) \qquad (0 < \vartheta < 1). \end{aligned}$$

Dabei ist $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n$ ein Differentialoperator, welcher entsprechen auf das nachstehende "f" angewendet werden muss. (oder einfacher...: erst die Klammer "auspotenzieren" und dann die Funktion in die Klammer hinein multiplizieren.)

Taylorsche Formel für m unabhängige Variablen

Will man es ganz genau wissen kann man die Taylorentwicklung auch weiter betreiben... und erhält dann für m Unbestimmte

$$\begin{aligned} &f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_m + h_m) = \\ &\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_m\frac{\partial}{\partial x_m})^k f(x_1, x_2, ..., x_m) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_m\frac{\partial}{\partial x_m})^{n+1} f(x_1 + \vartheta h_1, ..., x_m + \vartheta h_m) \\ &\quad wobei: \ (0 < \vartheta < 1). \end{aligned}$$

Der Satz über den Übergang von der Taylorformel zur Taylorreihe gilt ebenfalls in den beiden obigen Fällen.(Allerdings mit den entsprechenden "topologischen Begriffen" für den $\mathbb{R}^n$.)

verwendete Quelle: Mathematische Hilfsmittel der Physik